Corrigé de l'exercice n° 10 extrait du PDF Louis-le-Grand
« Transition entre la Terminale S et les CPGE scientifiques »

Exercice 10 (TD). *La suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est définie par* $u_0 = 1$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}.$$

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq n+1.$$

b) Trouver $C > 0$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq C(n+1).$$

Pour la suite nous adopterons la notation Python

$U_n = U_{n\,//\,2} + U_{n\,//\,3} + U_{n\,//\,6}$

Pour la partie b) nous poserons C = 169/73, nous avons conjecturé à l'aide d'un programme Python que 169/73 est la plus petite valeur possible pour C et nous allons le démontrer de façon formelle.

a) Démontrons par une récurrence forte que ∀n ∈ ℕ la proposition (I) $U_n \geq n+1$ est vraie.

Aide :

exprimer la troncature maximale de n//2 n//3 n//6

b1) Démontrons que la proposition (II) $U_n \leq C.n$ est vraie pour C = 169/73 et pour tout entier n≥75
par une récurrence forte que nous appliquerons à partir de n = 75

Aide :

l'idée de commencer par démontrer $U_n \leq C.n$ à partir d'un certain n
devrait être une un indice suffisant sur la façon de faire cette démonstration

Programme Python utilisé à l' appui de la démonstration formelle

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-

def Calc_U(i) :
    global U
    U[i]=U[i//6]+U[i//3]+U[i//2]
    print("U",i,"=",U[i],"  Un/(n+1)=",(str(U[i]/(i+1))+" "*7)[:7],"  Un/n=",(str(U[i]/i)+" "*7)[:7])
    return

def maximum(a,b) :
    UsNP1max=UsNmax=0
    for i in range(a,b+1) :
        Calc_U(i)
        if U[i]/(i+1)>UsNP1max : UsNP1max = U[i]/(i+1)
        if U[i]/i>UsNmax : UsNmax = U[i]/i
    print("Entre",a,"et",b,":\n  Un/(n+1) <=",UsNP1max,"\n  Un/n <=",UsNmax)
    e=input("Taper ENTER pour continuer")

U=[1]*2701
maximum(1,75)
maximum(75,450)
maximum(450,2700)
```