Corrigé de l'exercice n° 10 extrait du PDF Louis-le-Grand
« Transition entre la Terminale S et les CPGE scientifiques »

Exercice 10 (TD). *La suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est définie par* $u_0 = 1$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}.$$

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq n + 1.$$

b) Trouver $C > 0$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq C(n+1).$$

Pour la suite nous adopterons la notation Python

$U_n = U_{n\,//\,2} + U_{n\,//\,3} + U_{n\,//\,6}$

Pour la partie b) nous poserons C = 169/73, nous avons conjecturé à l'aide d'un programme Python que 169/73 est la plus petite valeur possible pour C et nous allons le démontrer de façon formelle.

a) Démontrons par une récurrence forte que ∀n ∈ ℕ la proposition (I) $U_n \geq n+1$ est vraie.

$U_0 = 1$ donc la proposition (I) est vraie pour n=0 — initialisation

Supposons que la proposition (I) soit vraie entre 0 et n-1 inclus avec n ≥ 1 — hypothèse de récurrence forte

alors pour le terme suivant U_n

$U_n = U_{n//2} + U_{n//3} + U_{n//6}$	or	$0 \leq n//6 \leq n//3 \leq n//2 \leq n-1$
$\geq (n//2 +1) + (n//3 + 1) + (n//6 + 1)$	donc	l'hypothèse de récurrence s'applique
$\geq (n/2 -1/2) +1 + (n/3 -2/3) + 1 + (n/6 -5/6) +1$		1/2 2/3 5/6 les troncatures maximales
$\geq 6n/6 -12/6 + 3$		
$\geq n + 1$		
la proposition (I) est vraie pour n		hérédité démontrée

Conclusion : ∀n ∈ ℕ, $U_n \geq n+1$ — ce qu'il fallait démontrer.

b1) Démontrons que la proposition (II) $U_n \leq C.n$ est vraie pour C = 169/73 et pour tout entier n≥75 par une récurrence forte que nous appliquerons à partir de n = 75

A l'aide du programme Python ci-après nous vérifions que la proposition (II) est vraie pour 75 ≤ n ≤ 449 — initialisation

Supposons que la proposition (I) soit vraie entre 75 et n-1 inclus avec n ≥ 450 — hypothèse de récurrence forte

alors pour le terme suivant U_n

$U_n = U_{n//2} + U_{n//3} + U_{n//6}$	or	$75 \leq n//6 \leq n//3 \leq n//2 \leq n-1$
$\leq (C . n//2) + (C . n//3) + (C . n//6)$	donc	l'hypothèse de récurrence s'applique
$\leq (C . n/2) + (C . n/3) + (C . n/6)$	puisque C>0	les troncatures sont minorantes
$\leq C.n$		
la proposition (II) est vraie pour n		hérédité démontrée

Conclusion : La proposition (II) $U_n \leq C.n$ est vraie pour C=169/73 et pour tout entier n≥75 b2) Démontrons que ∃ C>0 / ∀n ∈ ℕ la proposition (III) $U_n \leq C(n+1)$ est vraie

Rappel : nous avons posé C=169/73.
Nous avons démontré en b1) que

la proposition (II) $U_n \leq C.n$ est vraie pour tout entier n≥75

Comme C est positif nous pouvons en conclure à plus forte raison que

La proposition (III) $U_n \leq C(n+1)$ est vraie pour pour tout entier n≥75

Il reste à vérifier à l'aide du programme Python ci-après que
la proposition (III) $U_n \leq C(n+1)$ est vraie également pour n entier compris entre 0 et 74

Conclusion : $\exists C=\frac{169}{73}$ / ∀n ∈ ℕ, $U_n \leq C(n+1)$ ce qu'il fallait démontrer.

En outre $\frac{U_{72}}{72+1}=\frac{169}{73}$ donc il n'existe pas de C plus petit que 169/73

Programme Python utilisé à l' appui de la démonstration formelle

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-

def Calc_U(i) :
   global U
   U[i]=U[i//6]+U[i//3]+U[i//2]
   print("U",i,"=",U[i],"  Un/(n+1)=",(str(U[i]/(i+1))+" "*7)[:7],"  Un/n=",
(str(U[i]/i)+" "*7)[:7])
   return

def maximum(a,b) :
   UsNP1max=UsNmax=0
   for i in range(a,b+1) :
       Calc_U(i)
       if U[i]/(i+1)>UsNP1max : UsNP1max = U[i]/(i+1)
       if U[i]/i>UsNmax : UsNmax = U[i]/i
   print("Entre",a,"et",b,":\n  Un/(n+1) <=",UsNP1max,"\n  Un/n <=",UsNmax)
   e=input("Taper ENTER pour continuer")

U=[1]*2701
maximum(1,75)
maximum(75,450)
maximum(450,2700)
```

Pour arriver à la démonstration b) avec C=3 il suffisait de calculer les 6 premiers termes.

Mais pour prouver que C=169/73 est le plus petit C possible, il fallait calculer à minima les 73 x 6 =
438 premiers termes, c'est un bel exemple de calcul informatique à l'appui d'une démonstration formelle.

Proposition de correction par Gabin
en transition entre TS au Lycée Alain BORNE et MPSI au Lycée du Parc